SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
THÀNH PHỐ HỒ CHÍ MINH
TRƯỜNG THPT CHUYÊN LÊ HỒNG PHONG

ĐỀ THI CHÍNH THỨC

KỲ THI OLYMPIC TRUYỀN THỐNG 30 THÁNG 4
LẦN THỨ XXIX - NĂM 2025

Môn: **TOÁN** - Khối: **11**
Thời gian: **180 phút** *(không kể thời gian giao đề)*
Ngày thi: **05/4/2025**
*Đề thi gồm 01 trang, **05** câu*

Lưu ý: - Thí sinh làm mỗi câu trên một tờ giấy riêng và ghi rõ câu số mấy ở trang 1 của mỗi tờ giấy thi.
- Thí sinh không được sử dụng máy tính cầm tay.

Câu 1. (3 điểm) Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} 16x^2+\dfrac{7}{x}=\dfrac{27}{y} \\ 16y^2+\dfrac{9}{y}=\dfrac{21}{x}. \end{cases}$$

Câu 2. (4 điểm) Ký hiệu $\{x\}$ là phần lẻ của số thực x. Đặt

$$f(x)=\begin{cases} x-\{x\} & \text{khi } \{x\}\le \dfrac{1}{2} \\ x-\{x\}+1 & \text{khi } \{x\}>\dfrac{1}{2}. \end{cases}$$

a. Tìm tập hợp tất cả các số nguyên n sao cho $f(\sqrt{n})=2025$.

b. Với mỗi $n\in\mathbb{N}^*$, đặt $u_n=\dfrac{1}{f(\sqrt{1})}+\dfrac{1}{f(\sqrt{2})}+\cdots+\dfrac{1}{f(\sqrt{n})}-2\sqrt{n}$.

Chứng minh dãy số (u_n) có giới hạn hữu hạn và tìm giới hạn đó.

Câu 3. (4 điểm) Tìm số nguyên dương n nhỏ nhất sao cho có thể điền vào bảng 4×4 mỗi ô một số trong tập hợp $\{1,2,\ldots,n\}$ sao cho mỗi số $1,2,\ldots,n$ đều có mặt trong bảng, đồng thời trong mỗi hàng và trong mỗi cột không có hai số bằng nhau hoặc hơn kém nhau 1 đơn vị.

Câu 4. (4 điểm) Gọi a,b là các số nguyên dương thỏa mãn $a!+2\cdot(b!)=a^{2b}$.

a. Chứng minh $b\ne a-2$.

b. Tìm tất cả các cặp số $(a;b)$ thỏa mãn điều kiện đã cho.

Câu 5. (5 điểm) Cho tam giác nhọn ABC ngoại tiếp đường tròn (I). Gọi M,N và P theo thứ tự là trung điểm của BC,CA và AB. Gọi X,Y và Z theo thứ tự là giao điểm của các tiếp tuyến khác BC,CA,AB kẻ từ N và P, kẻ từ M và P, kẻ từ M và N tới (I), sao cho tam giác XYZ nhận (I) làm đường tròn nội tiếp và các điểm M,N,P theo thứ tự thuộc các đoạn thẳng YZ,ZX,XY.

a. Chứng minh đường tròn nội tiếp mỗi tam giác XPN,YPM,ZMN tiếp xúc với đường tròn nội tiếp tam giác MNP.

b. Chứng minh I là tâm đẳng phương của các đường tròn nội tiếp tam giác XPN,YPM và ZMN.

---------------- **HẾT** ----------------

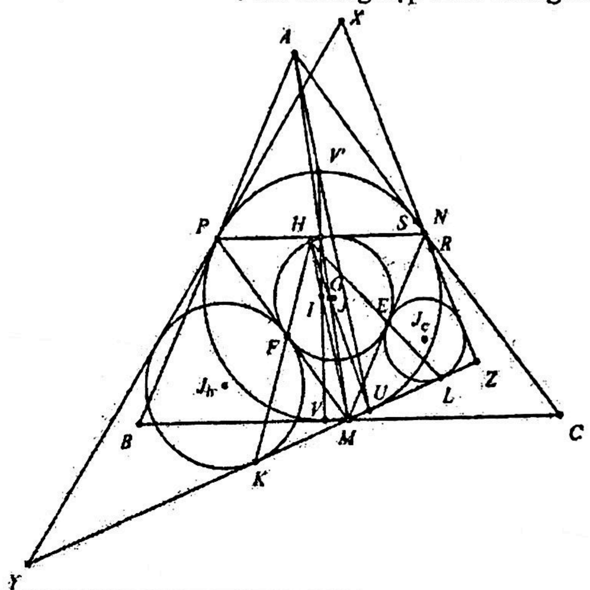
SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO THÀNH PHỐ HỒ CHÍ MINH TRƯỜNG THPT CHUYÊN LÊ HỒNG PHONG	KỲ THI OLYMPIC TRUYỀN THỐNG 30 THÁNG 4 LẦN THỨ XXIX - NĂM 2025
ĐÁP ÁN CHÍNH THỨC	Môn: TOÁN Khối: 11 Ngày thi: 05/04/2025

Câu	Nội dung	Điểm
1	Giải hệ phương trình $\begin{cases} 16x^2+\dfrac{7}{x}=\dfrac{27}{y} \\ 16y^2+\dfrac{9}{y}=\dfrac{21}{x}. \end{cases}$	3
	Điều kiện xác định: $x \neq 0, y \neq 0$. Khi đó hệ tương đương với $\begin{cases} \dfrac{72}{y}=16(3x^2+y^2) \\ \dfrac{56}{x}=16(x^2+3y^2) \end{cases}$	1
	$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{9}{2}=3x^2y+y^3 \\ \dfrac{7}{2}=x^3+3xy^2 \end{cases}$	1
	$\Leftrightarrow \begin{cases} 8=(y+x)^3 \\ 1=(y-x)^3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{1}{2} \\ y=\dfrac{3}{2}. \end{cases}$ Vậy hệ có nghiệm duy nhất $(x,y)=\left(\dfrac{1}{2};\dfrac{3}{2}\right)$.	1

Câu	Nội dung	Điểm
2	**Câu 1.** Ký hiệu $\{x\}$ là phần lẻ của số thực x. Đặt $f(x)=\begin{cases} x-\{x\} & \text{khi } \{x\}\le \frac{1}{2} \\ x-\{x\}+1 & \text{khi } \{x\}>\frac{1}{2} \end{cases}$ *a.* Tìm tập hợp tất cả các số nguyên n sao cho $f(\sqrt{n})=2025$. *b.* Với mỗi $n\in\mathbb{N}^*$, đặt $u_n=\frac{1}{f(\sqrt{1})}+\frac{1}{f(\sqrt{2})}+\dots+\frac{1}{f(\sqrt{n})}-2\sqrt{n}$. Chứng minh dãy số (u_n) có giới hạn hữu hạn và tìm giới hạn đó.	4
a.	Với mỗi số nguyên dương k, đặt N_k là tập các số nguyên dương m sao cho $f(\sqrt{m})=k$. Ta có $N_k=\left\{m\in\mathbb{Z}^+ \;\middle|\; k-\frac{1}{2}<\sqrt{m}\le k+\frac{1}{2}\right\}$	1
	$=\left\{m\in\mathbb{Z}^+ \;\middle|\; k^2-k+\frac{1}{4}<m\le k^2+k+\frac{1}{4}\right\}$ $=[k^2-k+1,k^2+k]=[(k-1)k+1,k(k+1)]$. Do vậy $\left\{n \middle| f(\sqrt{n})=2025\right\}=N_{2025}=[2024.2025+1;2025.2026]$.	1
b.	Dễ thấy N_k có $2k$ phần tử và mỗi số nguyên dương m nằm trong đúng một tập N_k với k nào đó.	0,5
	Đặt $\ell=f(\sqrt{n})$. Trong công thức của u_n, với mỗi số nguyên dương $k\le \ell-1$, hạng tử $\frac{1}{k}$ xuất hiện $2k$ lần; còn hạng tử $\frac{1}{\ell}$ xuất hiện $n-\ell(\ell-1)$ lần (tương ứng với $m=\ell(\ell-1)+1,\dots,n$).	0,5
	Từ đó $u_n=2(\ell-1)+\frac{n-\ell(\ell-1)}{\ell}-2\sqrt{n}=\frac{n-2\sqrt{n}\ell+\ell^2}{\ell}-1=\frac{(\ell-\sqrt{n})^2}{\ell}-1$. Để ý rằng $\left\|\sqrt{n}-\ell\right\|\le\frac{1}{2}$ và ℓ tiến ra $+\infty$ khi n tiến ra $+\infty$ nên $(u_n)\to -1$.	1

<table>
<tr><th>Câu</th><th>Nội dung</th><th>Điểm</th></tr>
<tr><td>3</td><td>Tìm số nguyên dương n nhỏ nhất sao cho có thể điền vào bảng 4×4 mỗi ô một số trong tập hợp $\{1,2,\ldots,n\}$ sao cho mỗi số $1,2,\ldots,n$ đều có mặt trong bảng, đồng thời trong mỗi hàng và trong mỗi cột không có hai số bằng nhau hoặc hơn kém nhau 1 đơn vị.</td><td>4</td></tr>
<tr><td></td><td>Xét một cách điền thỏa mãn yêu cầu. Do các số trong mỗi hàng đôi một khác nhau nên $n\ge 4$. Nói riêng số 2 buộc phải xuất hiện trong bảng. Xét hàng/cột chứa một số 2. Theo giả thiết các số trong hàng/cột này đôi một hơn kém nhau ít nhất 2 đơn vị nên $n\ge 8$.</td><td>1,5</td></tr>
<tr><td></td><td>Nếu $n=8$ thì trên hàng/cột chứa số 2 phải xuất hiện các số 2, 4, 6, 8.
Xét hàng/cột chứa số 7. Khi đó hàng/cột này phải chứa các số 1, 3, 5, 7.
Suy ra ô giao của hàng chứa một số 2 và cột chứa một số 7 phải được điền một số vừa chẵn vừa lẻ, mâu thuẫn.</td><td>1,5</td></tr>
<tr><td></td><td>Với $n=9$, ta có cách điền sau thỏa mãn
<table><tr><td>2</td><td>4</td><td>6</td><td>8</td></tr><tr><td>9</td><td>1</td><td>3</td><td>5</td></tr><tr><td>7</td><td>9</td><td>1</td><td>3</td></tr><tr><td>5</td><td>7</td><td>9</td><td>1</td></tr></table></td><td>1</td></tr>
</table>

Câu	Nội dung	Điểm
4	Gọi a, b là các số nguyên dương thỏa mãn $a!+2\cdot(b!)=a^{2b}$. *a.* Chứng minh $b \neq a-2$. *b.* Tìm tất cả các cặp số $(a;b)$ thỏa mãn điều kiện đã cho.	4
a.	Giả sử $b=a-2$. Khi đó ta có $a!+2(a-2)!=a^{2a-4}$. Do $b \geq 1$ nên $a \geq 3$. Rõ ràng $a=3$ không thỏa mãn điều kiện trên nên $a \geq 4$. Khi đó $a^{2a-4} \geq a^a$ và $a!+2((a-2)!)<2(a!)=2\cdot 2\cdot 3\cdots a<a^a$, vô lý. Vậy $b \neq a-2$.	1,5
b.	Rõ ràng $a>1$. Với $a=2$ thì $2+2\cdot(b!)=2^{2b}$. Dễ thấy $b=1$ thỏa mãn vì $2+2\cdot 1!=2^2$. Nếu $b \geq 2$ thì $2 \mid b!$ do đó $2+2\cdot(b!) \equiv 2 \pmod 4$ trong khi đó $4 \mid 2^{2b}$, mâu thuẫn.	0,5
	Xét $a \geq 3$. Nếu $b \geq a-1$ thì $(a-1) \mid b!$ và $(a-1) \mid a!$ nên ta có $(a-1) \mid a^{2b}$, mâu thuẫn do $a-1 \geq 2$ và $a-1$ nguyên tố cùng nhau với a.	1
	Suy ra $b \leq a-3$ (do $b \neq a-2$). Khi đó $$2b!\left(1+\frac{(b+1)(b+2)...(a-1)}{2}a\right)=a^{2b}.$$ Nhân tử $1+\frac{(b+1)(b+2)\cdots(a-1)}{2}\cdot a$, lớn hơn a và nguyên tố cùng nhau với a, vì thế không thể là ước của a^{2b} được, mâu thuẫn. Vậy $(a,b)=(2,1)$ là cặp số duy nhất thỏa mãn yêu cầu của bài toán.	1

Câu	Nội dung	Điểm
5	Cho tam giác nhọn ABC ngoại tiếp đường tròn (I). Gọi M, N và P theo thứ tự là trung điểm của BC, CA và AB. Gọi X, Y và Z theo thứ tự là giao điểm của các tiếp tuyến khác BC, CA, AB kẻ từ N và P, kẻ từ M và P, kẻ từ M và N tới (I), sao cho tam giác XYZ nhận (I) làm đường tròn nội tiếp và các điểm M, N, P theo thứ tự thuộc các đoạn thẳng YZ, ZX, XY. *a.* Chứng minh đường tròn nội tiếp mỗi tam giác XPN, YPM, ZMN tiếp xúc với đường tròn nội tiếp tam giác MNP. *b.* Chứng minh I là tâm đẳng phương của các đường tròn nội tiếp tam giác XPN, YPM và ZMN.	5
	Giả sử các điểm có vị trí như hình vẽ, các trường hợp khác chứng minh tương tự. 	
a.	Gọi (J_a), (J_b), (J_c), (J) lần lượt là đường tròn nội tiếp các tam giác XPN, YPM, ZMN, MNP và U, V, R, S lần lượt là tiếp điểm của (I) với YZ, BC, XZ, AC. Gọi E là tiếp điểm của (J_c) với MN. Ta có $ZM - ZN = MU + UZ - NR - RZ = MU - NR = MV - NS$ $= VC - MC - CS + CN = CN - CM = PM - PN.$	1
	Do đó $ME = \dfrac{MN + MZ - NZ}{2} = \dfrac{MN + MP - PN}{2}$. Suy ra E cũng là tiếp điểm của (J) với MN. Suy ra (J) tiếp xúc với (J_c). Tương tự (J) cũng tiếp xúc với $(J_a), (J_b)$.	1
b.	Gọi F, K là tiếp điểm của (J_b) với MP, YZ, L là tiếp điểm của (J_c) với YZ, G là trọng tâm của tam giác ABC, VV' là đường kính của (I). Xét phép vị tự tâm F biến (J_b) thành (J), biến K thành H. Khi đó tiếp tuyến tại H của (J) song song với YZ. Tương tự ta thu được KF cắt EL tại H nằm trên (J). Ta có $ML = ME = MF = MK$ nên $KFEL$ là tứ giác nội tiếp. Từ đó HM là trục đẳng phương của (J_b) và (J_c).	1

	Chú ý rằng tiếp tuyến tại U của (I) song song với tiếp tuyến tại H của (J) nên $$V_G^{\frac{-1}{2}}: \Delta ABC \mapsto \Delta MNP,\ (I) \mapsto (J),\ U \mapsto H.$$ Suy ra $MH \parallel AU$.	1
	Mặt khác A, V', U thẳng hàng nên $IM \parallel AU$.	0,5
	Suy ra H, I, M thẳng hàng. Suy ra I thuộc trục đẳng phương của (J_b) và (J_c). Chứng minh tương tự ta thu được điều phải chứng minh.	0,5